Chapitre ②: Variables aléatoires

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité

On considère l'application X définie par:

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$w \longmapsto X(w)$$

Si pour tout $B \subset \mathbb{R}$, $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, alors

X s'appelle une variable aléatoire réelle

On a:

$$X^{-1}(B) = \{w \in \Omega / X(w) \in B\} \in \mathcal{A}$$

Exemple: On lance une fois pièce.

On a: $\Omega = \{P, F\}$, P = pile, F = face

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega) = \{\phi, \{F\}, \{P\}, \Omega\}$$

On considère l'application X définie par:

$$X : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$X(F) = 0 \quad , \quad w_1 = F$$
$$X(P) = 1 \quad , \quad w_2 = P$$

d'où X st une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

et $X(\Omega) = \{0, 1\}$ l'ensemble des résultats possibles

Si $B = \{0\}$, on a :

$$X^{-1}(\{0\}) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in \{0\}\}$$
$$= \{\omega \in \Omega / X(\omega) = 0\}$$
$$= \{F\} \in \mathcal{A}$$

L'application X prend des valeurs $x = 0, 1$.

Remarques :

1/ Si l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs de X st un ensemble fini ou dénombrable de $\mathbb{R}$, on peut écrire :

$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ et l'on dit que X st une variable aléatoire discrète

2/ Si l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs de X est un Intervalle ou une réunion d'intervalles X s'appelle variable aléatoire continue

Loi d'une variable aléatoire :

Soit X une variable aléatoire à variable réelles, définie comme suit :

$$X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow \mathbb{R}$$

On définit la fonction P_X comme suit :

$$P_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$$
$$B \longmapsto P_X(B) = P(X^{-1}(B))$$

d'où P_X est bien définie car : $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

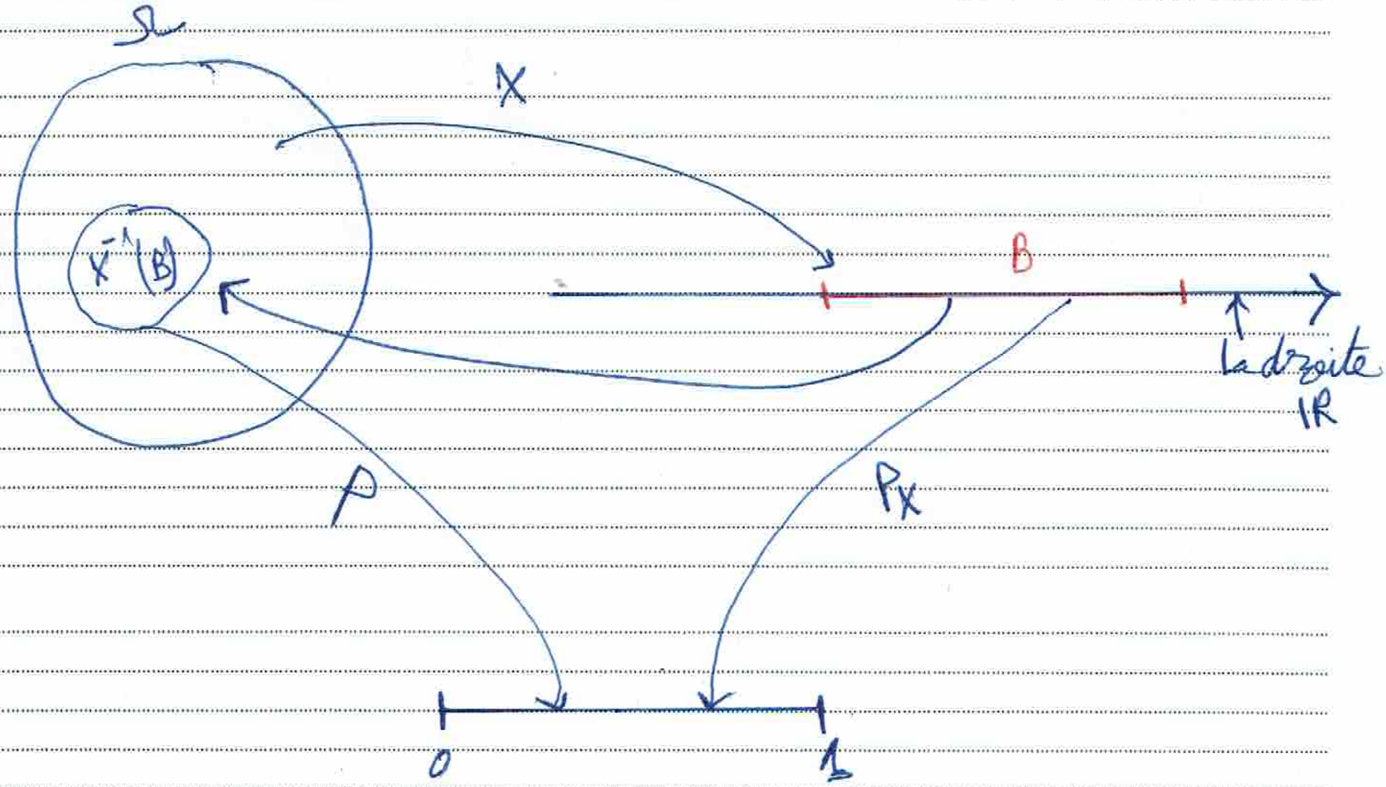
donc P_X est une probabilité sur $\mathbb{R}$

et par suite P_X s'appelle loi de probabilité de X

(ou loi de distribution de X)

On peut présente les données précédentes

par le diagramme suivant :



$$P_X(B) = P(X^{-1}(B))$$

En utilisant les notations suivantes :

$X^{-1}(B) = \{w \in \Omega / X(w) \in B\} = (X \in B)$

On dit que $(X \in B)$ est un évènement

$X^{-1}(]-\infty, a]) = \{w \in \Omega / X(w) \leq a\} = (X \leq a)$

$X^{-1}([a, b]) = \{w \in \Omega / a \leq X(w) \leq b\} = (a \leq X \leq b)$

$X^{-1}(\{k\}) = (X = k)$.

Donc, on peut calcul :

$P(X \leq a)$, $P(a \leq X \leq b)$, $P(X = k)$, ... etc.

Exemple : On lance deux dés (discernables).

Soit X la somme des deux nombres obtenus.

Donner la loi de probabilité de X ?

On a :

$$\Omega = \{(i, j) / i = 1, \ldots, 6 \text{ et } j = 1, \ldots, 6\}$$

$$= \{(1,1), (1,2), \ldots\ldots, (6,6)\}$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$$

On considère l'application X de Ω dans $\mathbb{R}$:

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$w = (i, j) \longmapsto X(i, j) = i + j$$

Donc la fonction X prend les valeurs $k = 2, 3, \ldots, 12$.

$\text{Card } \Omega = 6^2 = 36$

$X(\Omega) = \{2, 3, 4, \ldots, 12\}$ d'où X est discrète.

par exemple : la probabilité de l'événement $X = 6$ est calculée $P(X^{-1}(\{6\}))$.

Il faut déterminer $X^{-1}(\{6\})$, on a :

$$X^{-1}(\{6\}) = \{w \in \Omega / X(w) \in \{6\}\}$$
$$= \{w \in \Omega / X(w) = 6\}$$
$$= \{(i,j) \in \Omega / i + j = 6\}$$
$$= \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$$

d'où $P(X = 6) = \frac{5}{36}$

On peut alors former un tableau où sur la première ligne on met les valeurs de X et sur la seconde les probabilités correspondantes :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\sum_{k=2}^{12} P(X=k)$
$P(X=k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

Si l'on pose : $f(k) = P(X = k) = P(X^{-1}(\{k\}))$, alors x s'appelle la loi de X, et On a:

1/ $f(k) \geq 0, \forall k$

2/ $\sum_{k \in X(\Omega)} f(k) = 1$

Fonction d'une répartition d'une variable aléatoire:

La fonction de répartition de la loi de X est définie par:

$$F(x) = P(X \leq x) = P_X(]-\infty, x]).$$

F satisfait les propriétés suivantes:

① F est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$ $(0 \leq F \leq 1)$.

② F est monotone, croissante

③ F est continue à droite en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \overset{>}{\to} x_0} F(x) = F(x_0).$$

④ $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

⑤ Pour tous a et b réels où $a < b$, on a:

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a).$$

Exemple: On lance deux fois une pièce.

Soit X est le nombre de face obtenu.

- Déterminer la fonction de répartition de X.

On a : $\Omega = \{ \overbrace{(F,F)}^{w_1}, \overbrace{(F,P)}^{w_2}, \overbrace{(P,F)}^{w_3}, \overbrace{(P,P)}^{w_4} \}$

et $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

Car : $X(w_1) = 2$, $X(w_2) = X(w_3) = 1$ et $X(w_4) = 0$

La loi de X :

k	0	1	2	$\sum_{k=0}^{2} P(X=k)$
$P(X=k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

La probabilité que la face obtenir deux fois.

La fonction de répartition F de X est :

$$F(x) = P(X \leq x)$$

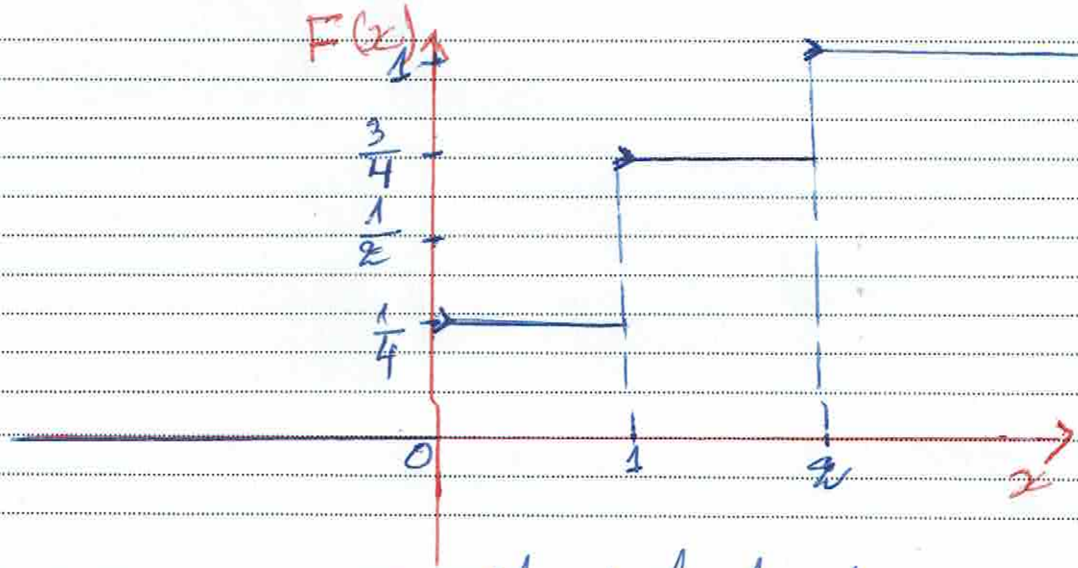
Si $x < 0$: $F(x) = P(X < x) = P(\phi) = 0$

Si $0 \leq x < 1$: $F(x) = P(X = 0) = \frac{1}{4}$

Si $x < 2$: $F(x) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$

Si $x \geq 2$: $F(x) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 1$

d'où $$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{4}, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{4}, & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$



graphe de la fonction F

1/ Si X est discrète, la fonction de répartition F est définie par :

$$F(x) = \sum_{x \geq k \text{ ou } k \leq x} f(k), \quad \text{où } f(k) = P(X=k).$$

2/ Si F est continue en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$, on dit que la variable aléatoire X est continue, et il possède alors une fonction densité de probabilité

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, telle que f est intégrable et on a les propriétés suivantes :

a/ $f(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

b/ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$

c/ f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être, en un nombre fini des points d/ La fonction de répartition F de X est définie par :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

f est dite densité de la probabilité de la variable aléatoire X.

- pour tous réels a et b tel que a < b, on a :

$$P(a \leq X < b) = \int_{a}^{b} f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

- si X est continue et $a \in \mathbb{R}$, on a :

$$P(X = a) = \int_{a}^{a} f(t)\,dt = 0.$$

Remarque : si F est continûment dérivable sur I, alors la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} F'(x), & \text{si } x \in I \\ 0, & \text{si } x \notin I \end{cases}$$

Exemple : Soit X une v.a continue, la densité de probabilité de X est :

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \in [0,1] \\ 0, & \text{si } x \notin [0,1]. \end{cases}$$

1/ Déterminer la fonction de répartition F de X.

2/ Calculer : $P(X < \frac{1}{2})$

⊗ On remarque : $f(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{1} f(t)dt + \int_{0}^{+\infty} f(t)dt$

$= \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{1} 2t\,dt + \int_{0}^{\infty} 0\,dt = 1$

d'où f est bien définie (densité de probabilité).

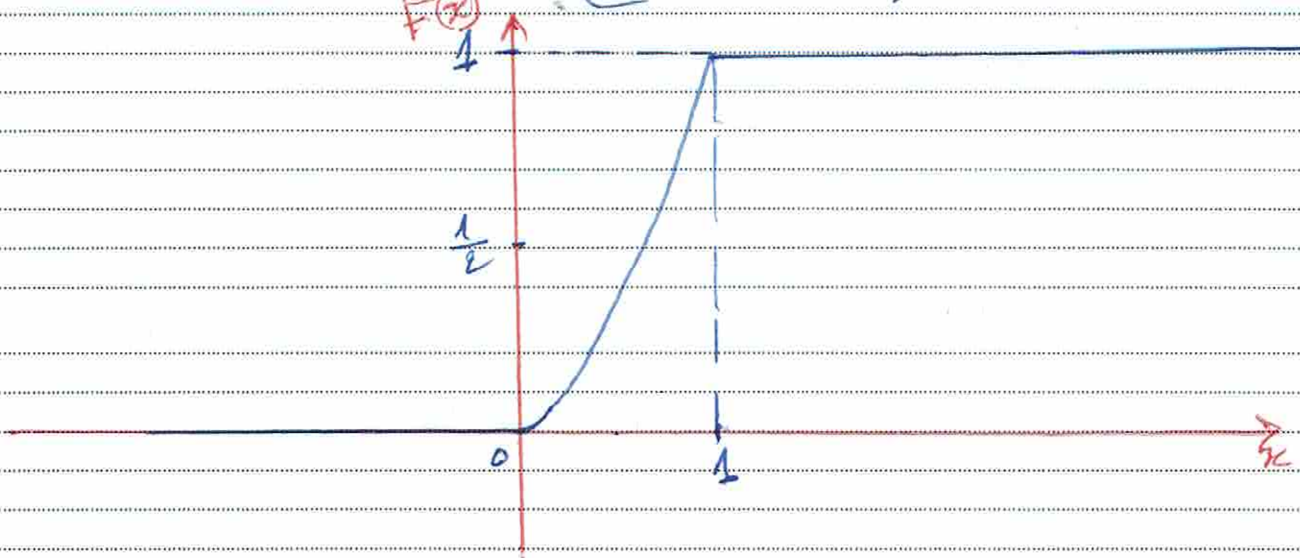
⊗ $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

- Si $x < 0$: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$

- Si $0 \leq x < 1$: $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} 2t\,dt = t^2 \Big|_0^x = x^2$

- Si $x \geq 1$: $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{1} 2t\,dt + \int_{1}^{x} 0\,dt = 1$

d'où
$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ x^2, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$



Caractéristiques d'une variable aléatoire

1) Moment d'ordre m :

Soit X une variable aléatoire définie sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Le moment d'ordre m $(m \in \mathbb{N}^*)$ de X,

noté $E(X^m)$, s'il existe est définie par :

i) Si X est discrète :

$$E(X^m) = \sum_{k \in \Omega(X)} k^m P(X=k)$$

tel que $P(X=k)$ est la loi de X.

ii) Si X est continue :

$$E(X^m) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m f(x)\, dx.$$

tel que f la densité de X.

2) Espérance mathématique (ou la moyenne) :

L'espérance mathématique de X, noté E(X), est

le moment d'ordre 1, c'est à dire :

i) Si X est discrète :

$$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k\, P(X=k)$$

ii) si X est continue :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx$$

3) Variance :

On pose : $\mu = E(X)$

La variance de la variable aléatoire X est définie par :

$$V(X) = E\left[(X-\mu)^2\right] = E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$$

propriétés :

Soient X une variable aléatoire et a, b deux nombres réels, on a :

1) $E(a) = a$
2) $E(aX+b) = aE(X) + b$
3) $V(a) = 0$
4) $V(aX+b) = a^2 V(X)$

preuve :

1) On considère la variable aléatoire constante

$X \equiv a$

donc la loi de X est définie par :

$$P(X=k) = \begin{cases} 1, & \text{si } k = a \\ 0, & \text{si } k \neq a \end{cases}$$

donc

$$E(a) = \sum_{k=a}^{a} k\, P(X=k) = a \times P(X=a) = a \times 1 = a$$

2/ Soient $a, b \in \mathbb{R}$, on a :

$$E(aX+b) = \sum_{k \in X(\Omega)} (ak+b)\, P(X=k)$$

$$= a \sum_{k \in X(\Omega)} k\, P(X=k) + b \sum_{k \in X(\Omega)} P(X=k)$$

$$= a\, E(X) + b$$

Car : $\sum_{k \in X(\Omega)} k\, P(X=k) = E(X)$ et $\sum_{k \in X(\Omega)} P(X=k) = 1$

3/ $V(a) = E(a^2) - (E(a))^2$, où a constante

$$= a^2 - a^2 = 0$$

4/ $V(aX+b) = E((aX+b)^2) - (E(aX+b))^2$

$$= E(a^2X^2 + 2abX + b^2) - (a\,E(X) + b)^2$$

$$= a^2 E(X^2) + \cancel{2ab\,E(X)} + \cancel{b^2} - a^2 (E(X))^2 - \cancel{2ab\,E(X)} - \cancel{b^2}$$

$$= a^2 E(X^2) - a^2 (E(X))^2$$

$$= a^2 (E(X^2) - (E(X))^2) = a^2 E(X)$$

Remarque: L'espérance mathématique st une application linéaire. $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$X \longmapsto E(X)$ linéaire

4/ L'écart-type:

La racine carrée de la variance st appelée l'écart-type de X, noté σ_X, donc

$$\sigma_X = \sigma = \sqrt{V(X)}$$

Exemple: Soit X une v.a.d de loi

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

Calculer: $E(X)$, $V(X)$ et σ_X

On a

1/ $$E(X) = \sum_{k=0}^{3} k\, P(X=k) = 0\times\frac{1}{5} + 1\times\frac{2}{5} + 2\times\frac{1}{5} + 3\times\frac{1}{5}$$

$$= \frac{7}{5} = 1{,}4$$

2/ $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Calcul $E(X^2)$: $$E(X^2) = \sum_{k=0}^{3} k^2 P(X=k) = 0 + \frac{2}{5} + \frac{4}{5} + \frac{9}{5}$$

$$= 3$$

d'où $V(X) = 3 - (1{,}4)^2 = 1{,}04$

3/ $\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1{,}04} \simeq 1{,}02$

5/ Fonctions caractéristiques:

a) Fonction génératrice des moments:

La fonction génératrice d'une variable aléatoire X est définie par:

i) si X est discrète:

$$M_X(t) = \sum_{k \in X(\Omega)} e^{kt} P(X=k), \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

ii) si X est continue:

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt} f(x)\,dx$$

b) Fonction caractéristique:

On appelle fonction caractéristique de la variable aléatoire X la fonction φ_X définie par:

$$\varphi_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$w \longmapsto \varphi_X(w) = E(e^{iXw}) = M_X(iw)$$

où i est le nombre complexe qui vérifie: $i^2 = -1$.

On a alors:

$$\varphi_X(w) = \sum_{k \in X(\Omega)} e^{iwk} P(X=k) \quad , \text{ où } X \text{ une v.a.d}$$

et $$\varphi_X(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iwx} f(x)\,dx, \text{ où } X \text{ une v.a.c}$$

Inégalités classiques :

1/ Inégalité de Markov :

Soit X une variable aléatoire. f est la densité de X.
Si $E(X) < +\infty$ ($E(X)$ existe et finie), alors pour tout $a > 0$,
On a :

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

2/ Inégalité de Tchebychev :

Soit X une variable aléatoire de moyenne $E(X) = \mu$
pour tout réel $a > 0$, on a :

$$P(|X - \mu| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2} = \frac{\sigma_X^2}{a^2}.$$

Université de Bouira
Faculté des sciences et des sciences appliquée
Département Informatique

Année universitaire 2022/2023
$3^{ème}$ Année (SI)
Module: Probabilités et statistique

Série d'éxercices n°2

Exercice 1: On lance une pièce trois fois. X est le nombre des faces obtenus.

1. Déterminer Ω, $X(\Omega)$ et la loi de X.
2. Donner la fonction de répartition de X.Puis tracer cette fonction.

Exercice 2: Soit X une variable aléatoire discrète (v.a.d) à valeurs dans $X(\Omega) = \{1, 2, ..., 5\}$ de loi: $P(X = i) = f(i) = \alpha(7 - i)$, $\forall i \in X(\Omega)$ où α est une constante.

1. Déterminer α.
2. Calculer $P(X^2 - 5X + 6 = 0)$.
3. Calculer $P(X^2 - 5X + 6 > 0)$.

Exercice 3: X une variable aléatoire discrète tel que $X(\Omega) = \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$. Considérons l'application f définie par $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow [0, +\infty[$, $k \longmapsto f(k) = \frac{\alpha}{k^2}$ où α paramètre.

1. Déterminer α pour que f soit une loi de probabilité pour X.
2. Calculer $P(X = 2)$, $P(X \leq 3)$, $P(X > 3)$.

Indication: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 4: L'oral d'un concours comporte au total 100 sujets, les candidats tirent au sort trois sujets et choisissent alors le sujet traité parmi ces trois sujets. Un candidat se présente en ayant révisé 60 sujets sur les 100.

1. Quelle est la probabilité pour que le candidat ait révisé:

(a) les trois sujets tirés.

(b) exactement deux sujets sur les trois sujets.

(c) aucun des trois sujets.

2. Définir une variable aléatoire associée à ce problème et donner sa loi de probabilité.

Exercice 5: Soit X une variable aléatoire discrète (v.a.d) à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ de loi:

$$f(k) = \begin{cases} \frac{\lambda}{k(k+1)}, & \text{si } k \geq 1 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

où λ est une constante.

1. Déterminer λ
2. Donner la fonction de répartition de X..

Exercice 6: Déterminer la fonction de répartition correspondant à chacune des fonctions des **densité** suivantes:

1) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{si } 1 \leq x \leq 4, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$

Exercice 7: Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = \begin{cases} ax - \frac{3}{2}, & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Pour quelle valeur de a pour que f soit une **densité** de probabilité d'une variable aléatoire X?
2. Calculer $P(X \geq 2)$
3. Calculer x_0 tel que $P(X < x_0) = \frac{1}{2}$.

Exercice 8: Soit f une fonction réelle définie par:

$$f(x) = \begin{cases} ae^{-\frac{1}{2}x}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. Quelle valeur doit prndre a pour que f soit la **densité** de probabilté d'une v.a X.
2. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et σ. Trouver et tracer la fonction de répartition $F(x)$ de X.

Exercice 9: Une urne contient 5 boules rouges et 6 boules noires. On tire, sans remise, 3 boules de cette urne. soit X le nombre de boules noires extraites.

1. Déterminer la fonction de répartition de X.
2. Calculer $P(X > 1)$.